

POWER DOMINATION NUMBER PADA GRAF LINTASAN COMB SISI GRAF BUKU SEGITIGA DIKAITKAN DENGAN KETERAMPILAN BERPIKIR TINGKAT TINGGI

Darian Aji Bawono¹, Dafik², Arif Fatahillah³

Abstract. *Power dominating set is a concept of determining a minimum vertex in a graph that can dominate vertex connected around. The smallest cardinality of the power dominating set is called power domination number. Power domination number denote γ_p is the minimum cardinality of a power dominating set, it has $\left\lceil \frac{Z(G)}{\Delta(G)} \right\rceil \leq \gamma_p(G)$ where $\gamma_p(G)$ is the power domination number of G , $Z(G)$ is zero forcing number of G , and $\Delta(G)$ is maximum degree of G . This paper is written to find the value of power domination number on graph. The used graph is path edge comb triangular book graph. And in each phase of finding this problem is associated with high order thinking skill.*

Keywords: *Power Domination Number, Edge Comb Product, High Order Thinking Skill*

PENDAHULUAN

Teori graf pertama kali diperkenalkan pada tahun 1736 melalui tulisan Leonhard Euler seorang ahli matematika dari Swiss. Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika diskrit yang digunakan sebagai alat bantu untuk mendeskripsikan persoalan agar lebih mudah dipahami dan diselesaikan. Representasi visual dari graf tersebut yaitu dengan menyatakan objek dengan titik dan hubungan antara objek dengan sisi.

Sebuah graf mempunyai pasangan himpunan (V, E) dimana V adalah himpunan tidak kosong dari elemen yang disebut titik (*vertex*), dan E adalah himpunan sisi (boleh kosong) dari pasangan tidak terurut dua titik (v_1, v_2) dimana $v_1, v_2 \in V$, yang disebut sisi (*edge*). V disebut himpunan titik dari G , dan E disebut himpunan sisi dari G . Jadi sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi satu buah pun, tetapi titiknya harus ada minimal satu [4].

Salah satu kajian dari teori graf adalah *power dominating set*. *Power dominating set* merupakan suatu konsep penentuan titik seminimal mungkin dalam suatu graf yang dapat mendominasi simpul-simpul terhubung disekitarnya. Kardinalitas terkecil dari *power dominating set* disebut *power domination number* yang dinotasikan dengan $\gamma_p(G)$ dan batas bawahnya $\left\lceil \frac{Z(G)}{\Delta(G)} \right\rceil \leq \gamma_p(G)$ [5].

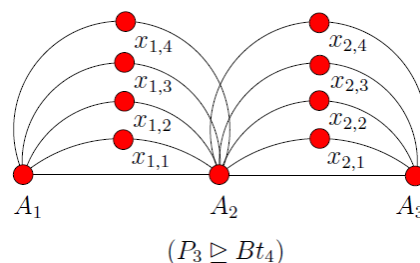
¹Mahasiswa S-1 Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember

² Dosen Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember

³ Dosen Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember

$Z(G)$ adalah Himpunan *zero forcing* dengan kardinalitas minimum. *Zero forcing* untuk sebarang graf dapat ditulis dengan sederhana yaitu $Z(G) \geq \delta$. Dengan $Z(G)$ merupakan *zero forcing* dan δ merupakan derajat minimum dari G [1].

Graf yang digunakan dalam penelitian ini adalah graf hasil operasi comb sisi antara graf lintasan dan graf buku segitiga. Misalkan G dan H adalah graf terhubung dan e adalah sisi dari graf H . Operasi comb sisi dari graf G dan H dinotasikan dengan $(G \geq H)$ adalah graf yang diperoleh dengan mengambil satu salinan graf G dan $jE(G)$ salinan graf H dan melekatkan salinan ke- i dari graf H di sisi cangkok ke- i dari graf G [2]. Peneliti memilih graf tersebut karena graf hasil operasi comb sisi antara graf lintasan dan graf buku segitiga memiliki nilai keindahan yang tinggi dan sangat menarik.



Gambar 1. Graf Hasil Operasi Comb Sisi ($P_3 \geq Bt_4$)

Berpikir merupakan suatu proses kegiatan untuk menemukan kebenaran dan keterampilan kognitif untuk memperoleh pengetahuan. Salah satu keterampilan berpikir dalam pemecahan masalah matematika adalah keterampilan berpikir tingkat tinggi. Selain membutuhkan kemampuan mengingat, memahami, dan menerapkan, keterampilan ini juga membutuhkan kemampuan lain yang lebih tinggi yaitu menganalisis, mengevaluasi, dan menciptakan. Teori yang membahas keterampilan berpikir tingkat tinggi adalah Taksonomi Bloom. Bloom mengklasifikasikan ranah kognitif dalam enam tingkatan, yaitu pengetahuan, pemahaman, penerapan, analisis, sintesis, dan evaluasi. Setelah direvisi, taksonomi Bloom berubah menjadi mengingat, memahami, menerapkan, menganalisis, mengevaluasi, dan menciptakan. Mengingat, memahami, dan menerapkan merupakan tiga ranah yang termasuk kategori keterampilan berpikir tingkat rendah, sedangkan tiga ranah lainnya seperti menganalisis, mengevaluasi, dan menciptakan termasuk kategori keterampilan berpikir tingkat tinggi [3]. Penelitian ini akan mengkaji keterkaitan antara menciptakan teorema dari *power domination number* dengan keterampilan berpikir tingkat tinggi yang berpacu pada taksonomi Bloom yang telah direvisi.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini menggunakan metode deduktif aksiomatik dalam menyelesaikan permasalahan. Metode deduktif aksiomatik merupakan metode penelitian yang menggunakan prinsip-prinsip pembuktian deduktif yang berlaku dalam logika matematika dengan menggunakan aksioma atau teorema yang telah ada untuk memecahkan suatu masalah. Penelitian ini terlebih dahulu menentukan objek penelitian berupa graf hasil operasi comb sisi. Setelah itu menentukan kardinalitas dari graf tersebut. Selanjutnya menentukan titik yang memiliki derajat maksimum pada graf tersebut sebagai titik dominator (*power*). Setelah tahapan tersebut, periksa apakah tetangga terdekat memiliki derajat dua dan analisa keoptimalannya dengan menggunakan metode *zero forcing*. Selanjutnya dapat ditentukan γ_p minimal dari graf tersebut dengan perbandingan fungsi *ceilling* dari *zero forcing* dengan derajat terbesar dari graf. Penelitian ini juga menggunakan tahapan-tahapan Taksonomi Bloom yang telah direvisi yaitu mengingat, memahami, menerapkan, menganalisis, mengevaluasi, dan menciptakan. Setiap langkah dalam penelitian ini akan dikaitkan dengan tahapan-tahapan tersebut untuk mencapai keterampilan berpikir tingkat tinggi.

HASIL PENELITIAN

Penelitian ini menghasilkan teorema baru *power domination number* pada graf hasil operasi comb sisi. Penelitian ini diawali dengan menentukan kardinalitas pada graf hasil operasi comb sisi dan menentukan *power domination number* dari graf hasil operasi comb sisi, serta mengaitkan semua tahapan dengan keterampilan berpikir tingkat tinggi sesuai dengan taksonomi bloom yang telah direvisi. Berikut hasil teorema beserta pembuktiannya:

➤ Tahapan mengingat

Tahap pertama yaitu menentukan graf hasil operasi comb sisi yaitu graf $(P_n \supseteq Bt_m)$. Mengingat kembali mengenai ordo (banyaknya titik) dan size (banyaknya sisi) juga diperlukan pada tahapan ini karena akan menentukan kardinalitas graf tersebut.



Gambar 2. Graf Lintasan (P_4)

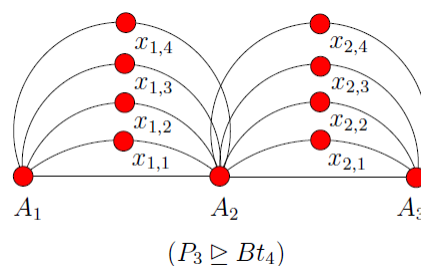
Gambar 1 menunjukkan sebuah contoh graf yang berordo 4 dengan himpunan titik $\{x_1; x_2; x_3; x_4\}$ dengan himpunan sisi $\{x_1x_2; x_2x_3; x_3x_4\}$. Selain itu tahap yang diperlukan adalah mengingat batasan-batasan yang ada pada graf yang akan dibangun yaitu mengenai definisi terkait graf comb sisi dan teorema *power domination number* yang diperlukan dalam proses menujuterciptanya teorema yang baru.

➤ Tahapan memahami

Tahap kedua yaitu memahami, dalam tahapan ini setelah diketahui graf yang telah dibangun sesuai dengan batasan yang telah ada, maka hal yang perludipahami yaitu kardinalitas dari graf hasil operasi comb sisi dan pemahamanterkait teorema *power domination number*. Sebelum menentukan kardinalitas graf tersebut, pemahaman mengenai definisi dari graf khusus yang digunakan dan dioperasikan dengan operasi combsisi, perlu observasi terhadap masing-masing graf khusus yang akan dioperasikan yaitu graf *path* (P_n) dan *triangular book* (Bt_m) untuk membangun graf hasil operasi comb sisi.

1. untuk titik graf *path*: $V(P_n) = \{A_i; 1 \leq i \leq n\}$.
2. untuk sisi graf *path*: $E(P_n) = \{A_iA_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\}$
3. untuk graf *triangular book*: $V(Bt_m) = \{A_i; x_j; 1 \leq i \leq 2; 1 \leq j \leq m\}$
4. untuk graf *triangular book*: $E(Bt_m) = \{A_iA_{i+1}; i = 1\} \cup \{A_ix_j; 1 \leq i \leq 2; 1 \leq j \leq m\}$

Setelah memahami hal tersebut, perlu pemahaman de-nisi dari graf comb sisi untuk mengoperasikan kedua graf yang digunakan dalam penelitian ini. Setelah pemahaman tersebut, dilanjutkan dengan membangun graf baru dari hasil operasi comb sisi.

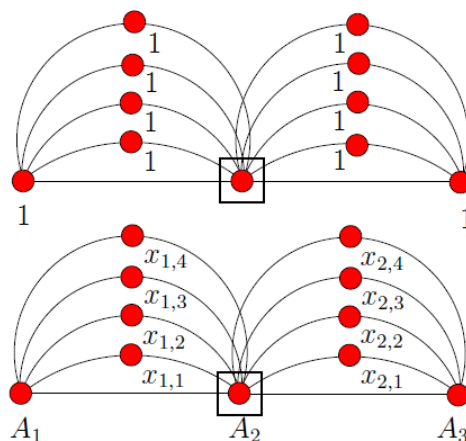


Gambar 3. Graf Hasil Operasi Comb Sisi $P_3 \supseteq Bt_4$

Hasil operasi comb sisi graf dari (P_n) dan (Bt_m) dinotasikan dengan $(P_n \oplus Bt_m)$. Untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$ himpunan titik dan sisi pada $(P_n \oplus Bt_m)$ dengan melekatkan sisi $\{A_i A_{i+1}; i = 1\}$ dari graf (Bt_m) pada setiap sisi dari graf *path* (P_n) , dapat disajikan dalam $V(P_n \oplus Bt_m) = \{A_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{A_i; x_j; 1 \leq i \leq 2; 1 \leq j \leq m\}$ dan himpunan sisi $E(P_n \oplus Bt_m) = \{A_i A_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{A_i x_{ij}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m\} \cup \{A_{i+1} x_{ij}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m\}$. Sehingga $|V(P_n \oplus Bt_m)| = mn + n - m$ dan $|E(P_n \oplus Bt_m)| = mn - m$.

➤ Tahapan menerapkan

Setelah diketahui kardinalitas yang terdapat pada graf hasil operasi comb sisi, langkah selanjutnya yakni menentukan titik berderajat maksimal yang nantinya akan digunakan sebagai titik pendominasi (*power*) dari graf hasil operasi comb sisi. Setiap simpul pada *power dominating set* mengobservasi dirinya sendiri dan simpul tetangga. Setelah itu jika sebuah simpul memiliki tetangga lebih dari satu $k > 1$, maka $k - 1$ simpul akan terobservasi, sehingga semua simpul k terobservasi.



Gambar 4. *Power Dominating Set* dari Graf Hasil Operasi Comb Sisi $P_3 \oplus Bt_4$

➤ Tahapan menganalisis

Tahap keempat yang dilakukan adalah menunjukkan *power domination number* dari graf hasil operasi comb sisi $(P_n \oplus Bt_m)$ dengan $S = \{A_i; i \in \text{genap}\}$ dimana S adalah himpunan titik pendominasi berdasarkan hasil *power dominating set* beberapa ekspansi dan dapat membentuk pola sebagai berikut :

n	γ_p	Untuk $n \geq 3; n \in \text{ganjil}; i = \frac{n-1}{2}$
3	1	$U_n = a + (n-1)b$
4	2	$= 1 + (i-1)1$
5	2	$= i$
6	3	$= \frac{n-1}{2} \text{persamaan 1}$
7	3	Untuk $n \geq 4; n \in \text{genap}; i = \frac{n-2}{2}$
		$U_n = a + (n-1)b$
		$= 2 + (i-1)1$
		$= i + 1$
		$= \frac{n}{2} \text{persamaan 2}$

Keterangan : n = banyak ekspan

γ_p = power domination number

Dari persamaan (1) dan (2) dapat dibentuk formula dalam fungsi *ceilling* yaitu $\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$ kemudian menentukan batas bawah dari graf hasil operasi yang digunakan. Batas bawah dari *power domination number* adalah perbandingan fungsi *ceilling* dari perbandingan antara *zero forcing* dengan derajat terbesar dari graf hasil operasi comb sisi. Berikut adalah pola dari *zero forcing* dan derajat terbesar dari graf hasil operasi comb sisi:

Derajat terbesar ($\Delta(G)$)

m	$\Delta(G)$	$U_n = a + (n-1)b$
2	6	$= 6 + (m-2)2$
3	8	$= 2m + 2$
4	10	
5	12	
6	14	

Keterangan : m = banyak ekspan

$\Delta(G)$ = derajat terbesar

Zero forcing

m \ n	2	3	4	5
3	4	6	8	10
4	6	9	12	15
5	8	12	16	20
6	10	15	20	25

$$U_3 = a + 2b = 4$$

$$a + (2)2 = 4$$

$$a + 4 = 4$$

$$a = 0$$

$$A = a + (n - 1)b$$

$$= 0 + (n - 1)2$$

$$= 2n - 2$$

Beda:

$$a + 2b = 2$$

$$a + 2(1) = 2$$

$$a = 0$$

$$B = a + (n - 1)b$$

$$= 0 + (n - 1)b$$

$$= n - 1$$

Dari hasil di atas, $Z(P_n \cong Bt_m)$ dapat diformulasikan menjadi:

$$U_n = A + (n - 1)B$$

$$= 2n - 2 + (m - 2)(n - 1)$$

$$= mn - m$$

Sehingga didapatkan $\gamma_p(P_n \cong Bt_m) = \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$, $Z(P_n \cong Bt_m) = mn - m$, dan $\Delta(P_n \cong Bt_m) = 2m + 2$.

➤ Tahapan mengevaluasi

Tahapan selanjutnya yaitu mengecek dan mengkaji ulang apakah semua titik terobservasi serta memperkuat bukti dengan perbandingan *power domination number*

dengan batas bawah $\gamma_p(G) \geq \left\lceil \frac{Z(G)}{\Delta(G)} \right\rceil$, akan ditunjukkan bahwa $\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{mn-m}{2m+2} \right\rceil$

$$\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{mn-m}{2m+2} \right\rceil$$

$$\Leftrightarrow \left\lceil \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{mn-m+n-n}{2m+2} \right\rceil$$

$$\Leftrightarrow \left\lceil \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{n(m+1)-m-n}{2m+2} \right\rceil$$

$$\Leftrightarrow \left\lfloor \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{n(m+1)}{2m+2} - \frac{(m-n)}{2m+2} \right\rfloor$$

$$\Leftrightarrow \left\lfloor \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{n(m+1)}{2(m+1)} - \frac{(m-n)}{2(m+1)} \right\rfloor$$

$$\Leftrightarrow \left\lfloor \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{n}{2} - \left(\frac{m-n}{2(m+1)} \right) \right\rfloor$$

$$\text{Karena } \frac{1}{2} < \left(\frac{m+n}{2(m+1)} \right), \text{ maka } \left\lfloor \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \right\rfloor > \left\lfloor \frac{n}{2} - \frac{m+n}{2(m+1)} \right\rfloor$$

➤ Tahapan mencipta

Tahapan yang terakhir adalah mencipta, kata kunci yang digunakan untuk tahapan ini adalah memformulasikan dan menemukan. Makna dari memformulasikan yaitu bagaimana fungsi yang ditemukan setelah proses pada tahapan sebelumnya yakni tahap pengelompokan pada beda yang konsisten. Untuk hasil dari formulasi ini didapatkan $\gamma_p(P_n \oplus Bt_m) = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$.

KESIMPULAN

Dari hasil penelitian diatas, dapat disimpulkan bahwa kardinalitas titik (order) dan banyaknya sisi (size) pada graf hasil operasi comb sisi dalam penelitian ini adalah $|V(P_n \oplus Bt_m)| = nm + n - m$ dan $|E(P_n \oplus Bt_m)| = 2nm + n - 2m - 1$.

Power domination number pada graf hasil operasi comb sisi dalam penelitian ini adalah $\gamma_p(P_n \oplus Bt_m) = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$, untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$. Kaitan antara keterampilan berpikir tingkat tinggi dengan *power domination number* yakni dalam penemuan teorema dengan batas bawah yang telah ditentukan, yaitu dimulai dari mengingat graf khusus dan graf hasil operasi comb sisi, memahami kardinalitas dari graf dan definisi operasi comb sisi serta teorema *power domination number*, menerapkan teorema *power domination number* dengan menentukan titik pendominasi minimal, menganalisis dengan menunjukkan bahwa titik pendominasi yang dipilih adalah yang minimal, mengevaluasi dengan mengkaji ulang dan mengecek bahwa semua titik terobservasi, dan yang terakhir mencipta dengan memformulasikan rumus menjadi teorema yang baru.

SARAN

Berdasarkan hasil penelitian mengenai *power domination number* pada graf hasil operasi comb sisi, maka peneliti memberikan saran kepada pembaca agar dapat mengembangkan *power domination number* pada graf hasil operasi lainnya dan untuk sebarang graf khusus.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Benson, K. F., Ferrero, D., dkk. 2015. *Power domination and zero forcing*. arXivpreprint arXiv:1510.02421.
- [2] Dafik, I. H. Agustin, Eka, dan A. I. Nurvitaningrum. 2016. *On H – antimagicness of the comb product graph with subgraph as a terminal of its amalgamation*. Working paper, CGANT.
- [3] Santrock, John. 2008. *Psikologi Pendidikan*. Jakarta: Salemba Humanika.
- [4] Slamin. 2009. *Desain Jaringan Pendekatan Teori Graf*. Jember: Universitas Jember.
- [5] Zhao, M., dkk. 2006. *Power domination in graphs*. Discrete mathematics, Vol. 306, No. 15: 1812-1816.